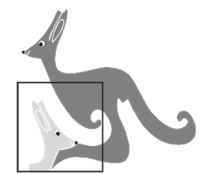


**Задачи
международного конкурса
«Кенгуру»**

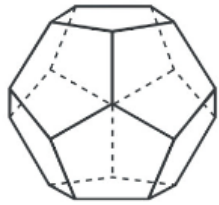
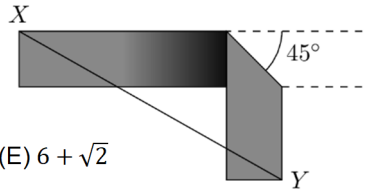


21.03.2024.

11-12 класс

23. У Ирины есть полоска бумаги длиной 12 см и шириной 2 см. Ирина складывает ее под углом 45° так, чтобы две части образовывали прямой угол (см. рисунок). Какова наименьшая возможная длина XU в см?

- (A) $6\sqrt{2}$ (B) $7\sqrt{2}$ (C) 10 (D) 8 (E) $6 + \sqrt{2}$



24. У Риты есть несколько двенадцатигранных игровых костей (додекаэдров). На каждой грани такой кости написано по одному числу от 1 до 12. Если бросить все кости одновременно, то вероятность того, что число 12 выпадет ровно один раз, равна вероятности того, что число 12 не выпадет. Сколько игровых костей у Риты?

- (A) 8 (B) 9
(C) 10 (D) 11 (E) 12

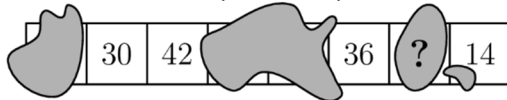
25. Полином $p(x)$ удовлетворяет уравнению $p(x+1) = x^2 - x + 2p(6)$ для любого действительного x . Чему равна сумма коэффициентов полинома $p(x)$?

- (A) -40 (B) -20 (C) -6 (D) 12 (E) 40

26. Числа x , y и z являются решениями уравнений $2^x = 3$, $2^y = 7$ и $6^z = 7$. Как x , y и z связаны между собой?

- (A) $z = \frac{y}{1+x}$ (B) $z = \frac{x}{y} + 1$ (C) $z = \frac{y}{x} - 1$ (D) $z = \frac{x}{y-1}$ (E) $z = y - \frac{1}{x}$

27. Полоска бумаги состоит из восьми квадратов. Первоначально в каждом квадрате было написано число 0. На каждом ходу мы выбирали 4 последовательных квадрата и прибавляли по единице к каждому числу в этих квадратах. На рисунке показан результат после нескольких ходов, но, к сожалению, пятна закрывают некоторые квадраты. Какое число написано в квадрате с вопросительным знаком?



- (A) 24 (B) 30 (C) 36 (D) 48 (E) Ничего из предыдущего

28. Областью определения и множеством значений функции f являются все действительные числа и $f(20-x) = f(22+x)$ для всех действительных x . Известно, что уравнение $f(x) = 0$ имеет ровно два корня. Чему равна сумма этих двух корней?

- (A) -1 (B) 20 (C) 21 (D) 22 (E) Ничего из предыдущего

29. Двенадцать точек делят окружность на 12 равных дуг. Сколько треугольников, содержащих угол 45° , можно образовать, выбирая любые три из этих точек?

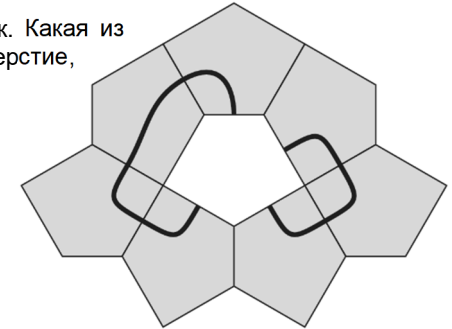
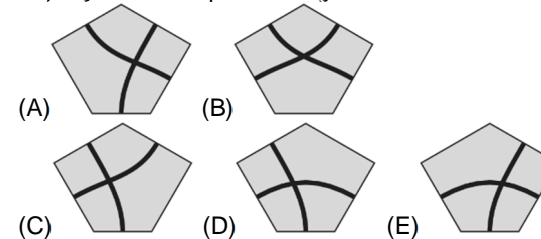
- (A) 48 (B) 60 (C) 72 (D) 84 (E) 96

30. Специальное четырехзначное число $\overline{abcd} = a^a + b^b + c^c + d^d$. Чему равно a ?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Задачи, оцениваемые в 3 балла

1. Узор состоит из равных пятиугольных плиток. Какая из плиток (A) – (E), помещенная в центральное отверстие, образует самопересекающуюся петлю?

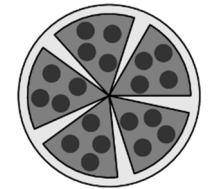


2. Какое из этих целых чисел на два меньше числа, кратного десяти, на два больше квадрата некоторого числа и в два раза больше простого числа?

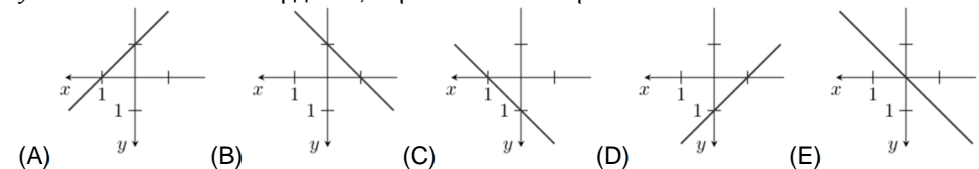
- (A) 78 (B) 58 (C) 38 (D) 18 (E) 6

3. Молодой кенгуру разрезал пиццу на шесть равных кусков. Съев один кусок, он разложил оставшиеся куски так, чтобы между ними были равные промежутки. Каков размер угла каждого промежутка?

- (A) 5° (B) 8° (C) 9° (D) 10° (E) 12°



4. У Игоря есть необычная привычка рисовать плоскость xu с положительным направлением осей координат влево и вниз. Как бы выглядел график функции $y = x + 1$ в системе координат, нарисованной Игорем?



5. Катя бросает кубик. Вероятность выпадения каждого из чисел 2, 3, 4 или 5 равна $\frac{1}{6}$, но вероятность выпадения 6 в два раза превышает вероятность выпадения 1. Какова вероятность выпадения 6?

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{7}{36}$ (D) $\frac{2}{9}$ (E) $\frac{5}{18}$

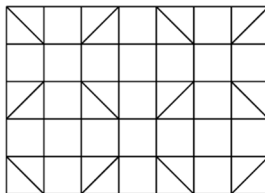
6. Каково значение выражения $16^{15} + 16^{15} + 16^{15} + 16^{15}$?

- (A) 16^{19} (B) 4^{31} (C) 4^{60} (D) 16^{60} (E) 4^{122}

Время, отведенное на решение задач, — 75 минут!

7. Лиза хочет раскрасить квадраты и треугольники (см. рисунок) так, чтобы никакие две соседние фигуры, даже имеющие только общую вершину, не были одинакового цвета. Какое наименьшее количество цветов необходимо Лизе?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7



8. На столе доньшками вниз стоят 6 пустых стаканов. За любой один ход мы переворачиваем ровно 4 из них. Какое наименьшее количество ходов нужно сделать, чтобы перевернуть все стаканы?

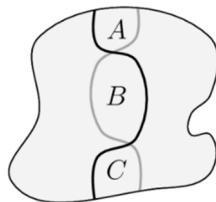
- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

9. Сергей начинает с числа 1, умножая его либо на 6, либо на 10. Затем он опять умножает результат либо на 6, либо на 10, продолжая эту процедуру много раз. Какое из чисел (A) – (E) Сергей не сможет получить?

- (A) $2^{100}3^{20}5^{80}$ (B) $2^{90}3^{20}5^{80}$ (C) $2^{90}3^{20}5^{70}$ (D) $2^{110}3^{80}5^{30}$ (E) $2^{50}5^{50}$

10. Черная и серая тропы пересекают парк (см. рисунок). Каждая тропа делит парк на две части равной площади. Пусть A , B и C – площади частей парка между тропами. Какое из следующих утверждений верно?

- (A) $A = C$ (B) $B = A + C$ (C) $B = \frac{1}{2}(A + C)$
(D) $B = \frac{2}{3}(A + C)$ (E) $B = \frac{3}{5}(A + C)$

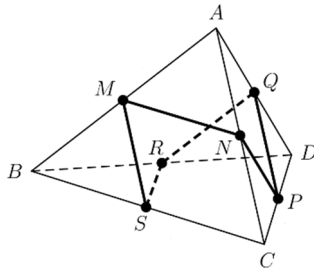


Задачи, оцениваемые в 4 балла

11. Ровно одно из этих утверждений о некотором натуральном числе n верно. Какое?
(A) n делится на 3 (B) n делится на 6 (C) n нечетно (D) $n = 2$ (E) n простое число

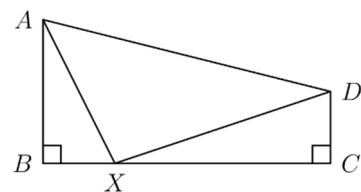
12. В треугольной пирамиде $ABCD$ известны длины ребер: $AD = 5$, $AC = 6$, $AB = 7$, $CD = 8$, $BD = 9$ и $BC = 10$. Точки M, N, P, Q, R и S являются серединами ребер пирамиды (см. рисунок). Какова длина замкнутой ломаной линии $MNPQRSM$?

- (A) 19 (B) 20
(C) 21 (D) 22 (E) 23



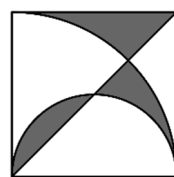
13. В четырехугольнике $ABCD$ углы B и C равны 90° , $AB = 4$, $BC = 8$ и $CD = 2$. Точка X лежит на BC . Каково минимальное значение $AX + XD$?

- (A) $9\sqrt{2}$ (B) 12
(C) 13 (D) 10
(E) Ничего из предыдущего



14. У Дана есть черные и белые кубики одинакового размера в достаточном количестве. Он использует 27 из них, чтобы построить куб $3 \times 3 \times 3$. Дан хочет, чтобы ровно половина поверхности куба была черной и ровно половина была белой. Какое наименьшее количество черных кубиков он может использовать?

- (A) 14 (B) 13 (C) 12 (D) 11 (E) Ничего из предыдущего

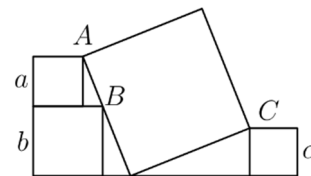


15. В квадрате со стороной 6 см проведены диагональ, полуокружность и четверть окружности (см. рисунок). Диаметр полуокружности и радиус четверти окружности равны стороне квадрата. Какова площадь (в см^2) закрашенной части квадрата?

- (A) 9 (B) 3π
(C) $6\pi - 9$ (D) $10\pi/3$ (E) 12

16. На рисунке изображены четыре квадрата. Длины сторон меньших квадратов равны a , b и c (см. рисунок). Вершины A и C двух меньших квадратов совпадают с двумя противоположными вершинами большого квадрата. Вершина B третьего маленького квадрата находится на стороне большого квадрата. Какое из следующих выражений представляет длину стороны самого большого квадрата?

- (A) $\frac{1}{2}\sqrt{a + b + c}$ (B) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (C) $\sqrt{(a + b)^2 + c^2}$
(D) $\sqrt{(b - a)^2 + c^2}$ (E) $\sqrt{a^2 + ab + b^2 + c^2}$



17. Какое из выражений (A) – (E) самое большое, если числа p и q – положительные, причем $p < q$?

- (A) $\frac{p+3q}{4}$ (B) $\frac{p+2q}{3}$ (C) $\frac{p+q}{2}$ (D) $\frac{2p+q}{3}$ (E) $\frac{3p+q}{4}$

18. Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна из цифр 1, 2 или 3?

- (A) 27 (B) 147 (C) 441 (D) 557 (E) 606

19. Пусть $N = \overline{pqrs}$ – отличное от нуля четырехзначное число. Если поставить десятичную запятую между цифрами q и r , то число $\overline{pq,rs}$ является средним арифметическим двузначных чисел \overline{pq} и \overline{rs} . Какова сумма цифр числа N ?

- (A) 14 (B) 18 (C) 21 (D) 25 (E) 27

20. Две свечи одинаковой длины начинают гореть одновременно, каждая со своей постоянной скоростью. Одна из свечей сгорит за 4 часа, другая за 5 часов. Сколько часов им придется гореть, прежде чем одна свеча станет в 3 раза длиннее другой?

- (A) $\frac{40}{11}$ (B) $\frac{45}{12}$ (C) $\frac{63}{20}$ (D) 3 (E) $\frac{47}{14}$

Задачи, оцениваемые в 5 баллов

21. У Андрея есть шесть карточек, на каждой стороне каждой из которых написано по одному числу. Пары чисел на карточках: (5, 12), (3, 11), (0, 16), (7, 8), (4, 14) и (9, 10). Карточки можно размещать в любом порядке на пустых местах рисунка.

$$\square + \square + \square - \square - \square - \square = ?$$

Какой наименьший результат может получить Андрей?

- (A) -23 (B) -24 (C) -25 (D) -26 (E) -27

22. Уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $bx^2 + ax + c = 0$ имеют общее решение, a, b, c — действительные, попарно различные, отличные от нуля числа. Что из следующего обязательно должно быть верно?

- (A) общим решением должно быть $x = 0$
(B) квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет ровно одно действительное решение
(C) $a > 0$ (D) $b < 0$ (E) $a + b + c = 0$